[Συγγράμματα: Ακριβής - Αλικάκος, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

(Ύλη: ① Μερικές Δ.Ε 1^{η} τάξης (γραμμικές και μη γραμμικές)

Κυρίως ② Κυματική εξίσωση

③ Σειρές Fourier και εφαρμογή τους (Μεθ. χωρισμού Μεταβλητών)

(λίγο) ④ Εξίσωση Θερμότητας

(λίγο) ⑤ (Προχωρημένη) θεωρία Ελλειπτικών εξισώσεων]

7-6-15

"Εισαγωγικά

• Τι είναι μια Μερική Διαφορική Εξίσωση (ΜΔΕ);

- Είναι μια εξίσωση που αναφέρεται σε μια συνάρτηση (πραγματική) δύο τουλάχιστον μεταβλητών και περιέχει κάποιες από τις μερικές παραγώγους της.

Ορισμός

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$, ανοιχτό, $u: U\to\mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση, $k\geq 1$ η τάξη της ΜΔΕ. Τότε μια ΜΔΕ k τάξης θα έχει την γενική μορφή

$$(*)\quad F\Big(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, \underbrace{D^2u(x)}_{\text{Εσσιανός } Hu(x)}, \underbrace{Du(x)}_{=\nabla u(x)}, u(x), x\Big)=0, \quad \forall x\in U.$$

όπου $D^k u(x)$ συμβολίζει το διάνυσμα όλων των μερικών παραγώγων k-τάξης της u στο σημείο $x\in U$.

$\Rightarrow F: \mathbb{R}^{n^k}\times\mathbb{R}^{n^{k-1}}\times\dots\times\mathbb{R}^{n^2}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times U\longrightarrow\mathbb{R}$, όπου F τουλάχιστον συνεχής (συνήθως πολυώνυμο)

Μια πρώτη ταξινόμηση των ΜΔΕ μπορεί να γίνει σε γραμμικές και μη γραμμικές"

Ορισμός: Η ΜΔΕ ⊛ λέγεται α) <u>γραμμική</u>, αν είναι της μορφής $\sum_{|a|\leq k} a_a(x) D^a u(x) = f(x)$, $x \in U$ με $a=(a_1,\dots,a_n)\in \mathbb{N}_0$, $|a| = a_1 + \dots + a_n$, $D^a_u = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \cdots \partial x_n^{a_n}}$

Αν $f=0$ η ⊛ είναι <u>ομογενής</u>, ενώ αν $f\neq 0$ είναι <u>μη ομογενής</u>
$(a_a : U \to \mathbb{R},\ f: U \to \mathbb{R})$
[Δεν υπάρχουν γινόμενα μερικών παραγώγων με συναρτήσεις μερικών παραγώγων]

β) <u>ημιγραμμική</u> αν είναι της μορφής
$\sum_{|a|=k} a_a(x) D^a u(x) + b(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$, $\forall x \in U$.
[Δεν υπάρχουν γινόμενα μερικών παραγώγων ανώτερης τάξης με άλλες μερικές παραγώγους]

γ) <u>σχεδόν γραμμική</u> (οιονεί γραμμική) αν είναι της μορφής
$\sum_{|a|=k} a_a(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^a u + b(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$
[Δεν υπάρχουν γινόμενα μεταξύ παραγώγων ανώτερης τάξης με συναρτήσεις που εξαρτώνται από παραγώγους ανώτερης τάξης]

δ) <u>πλήρως μη γραμμική</u>, αν υπάρχουν και γινόμενα μερικών παραγώγων ανώτερης τάξης με συναρτήσεις που εξαρτώνται από μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης

Ορισμός: Ένα σύστημα ΜΔΕ k τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής
$F(D^k \bar{u}(x), D^{k-1}\bar{u}(x), \dots, D\bar{u}(x), \bar{u}(x), x) = 0$, $\forall x \in U \subset \mathbb{R}^n$, όπου

$\bar{u}: U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\bar{F}: \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^l$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Δεν υπάρχει γενική θεωρία για "όλες" τις ΜΔΕ

2) Η έρευνα περιορίζεται σε ορισμένες (κλάσεις) ΜΔΕ (ή συστήματα) και μελετούνται με χρήση ιδιοτήτων των φαινομένων που περιγράφουν και σύμφωνα με τα ερωτήματα που τίθεται από αυτά.

<u>Παραδείγματα</u>: Έστω $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $Du = \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}u\right)$

α) <u>γραμμικές</u> i) $\Delta u = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2}_{=\partial^2/\partial x_i^2} u = 0$ (Laplace, πρότυπο ελλειπτικών εξισώσεων)

ii) $u_t + \bar{b} \cdot \nabla u = 0$ (εξίσωση μεταφοράς)

iii) $u_t - \nabla \cdot (\bar{b} u) = 0$ (εξίσωση Liouville)

iv) $u_t - \Delta u = 0$ (εξίσωση θερμότητας) (πρότυπο παραβολικών εξ)

v) $u_{tt} - \Delta u = 0$ (κυματική εξίσωση, πρότυπο υπερβολικού τύπου εξ)

vi) $i u_t + \Delta u = 0$ (γραμ. Schrödinger $u: U \to \mathbb{C}$)

β) <u>Μη γραμμικές</u>: i) $\|\nabla u\| = 1 \iff (\underbrace{\partial_{x_1} u}_{\frac{\partial}{\partial x_1}u})^2 + \dots + (\partial_{x_n} u)^2 = 1$ (εξίσωση εικόνας)

ii) $-\Delta u = f(u)$ (εξίσωση Poisson)

iii) $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0$ (εξίσωση ελαχιστικής επιφάνειας)

iv) $u_t + u u_x = 0$ [εξίσωση Burgers (κρουστικά κύματα)]

v) $u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$ (Korteweg - de Vries (KdV))

vi) $i u_t + \Delta u = f(|u|^2) u$ (μη γραμ. Schrödinger (nls))

<u>Συστήματα ΜΔΕ</u>: α) <u>γραμμικά</u> i) $\mu \underbrace{\Delta \bar{u}}_{=\begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix}} + (\lambda + \mu) \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \bar{u})}_{=\begin{pmatrix} \partial x_1 (\nabla \cdot \bar{u}) \\ \vdots \\ \partial x_n (\nabla \cdot \bar{u}) \end{pmatrix}} = \bar{0}$

$\bar{u}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(Εξίσωση ισορροπίας γραμ. ελαστικότητας)

ii) $\bar{u}_{tt} - \mu\Delta\bar{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\bar{u}) = \bar{0}$ (εξ. δυναμικής γραμμ ελαστ.)

iii) $\bar{E}, \bar{B} : \underset{\subset\mathbb{R}^3}{U} \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ $\begin{cases} \bar{E}_t = \nabla\times\bar{B} \\ \bar{B}_t = -\nabla\times\bar{E} \\ \nabla\cdot\bar{B} = \nabla\cdot\bar{E} = 0 \end{cases}$ (εξ. Maxwell)

β) <u>Μη γραμμικά συστήματα</u>

i) $\begin{cases} \bar{u}_t + \bar{u}\cdot\nabla\bar{u} = -\nabla p \\ \nabla\cdot\bar{u} = 0 \end{cases}$ (Εξίσωση Euler, $u : \underset{\subset\mathbb{R}^3}{U} \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ ροή ασυμπίεστου ρευστού με μηδενικό ιξώδες, $\bar{u}$ είναι η ταχύτητα του ρευστού)

ii) $\begin{cases} \bar{u}_t + \bar{u}\cdot\nabla\bar{u} - \nu\Delta\bar{u} = -\nabla p \\ \nabla\cdot\bar{u} = 0 \end{cases}$ (Εξίσωση Navier-Stokes ροή ασυμπίεστου ρευστού με ιξώδες $\nu>0$ -ρευστομηχανική-αεροδυναμική)

[Η ύπαρξη λύσης για την Euler- και Navier-Stokes με $U = \mathbb{R}^3$ ολικά στο χρόνο (δηλ. $\forall t \in (0,+\infty)$) με αρχικές τιμές λείες (ομαλές): $\bar{u}(\cdot,0) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ είναι ανοιχτό πρόβλημα (Million Dollar Problems)]

<u>Ορισμός</u>: Μια $u : U \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (*) λέγεται γενική λύση της (*). (συνήθως όμως αναζητούμε λύσεις της (*) που ικανοποιούν κάποιες επιπλέον συνθήκες) (θα πρέπει π.χ. $u(t,x) = g(x)$, $\forall x \in \partial U$, U ο χώρος)

<u>Ιδεωδες</u>: Να βρούμε μια λύση σε κλειστή μορφή (explicitly, ρητά δοσμένη) $u(x) = \ldots$, πολλές φορές αυτό δεν είναι δυνατόν και αρκούμαστε στο να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας λύσης και κάποιων ιδιοτήτων της (π.χ. μοναδικότητα, συμπεριφορά για $t\to+\infty$, $t \to T$, $0 < T < +\infty$)

Ερώτηση: Τι μας ενδιαφέρει στη μελέτη μιας ΜΔΕ;

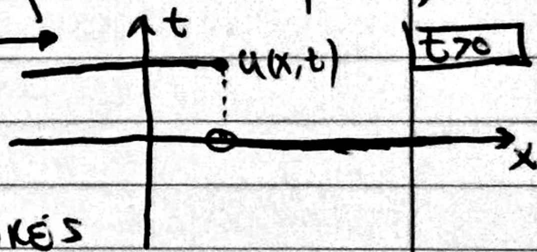
- Το πιο σύνηθες ερώτημα είναι το καλά-τεθιμένο, δηλαδή θέλουμε α) το πρόβλημα να έχει λύση (ύπαρξη) β) η λύση να είναι μοναδική (υπό κατάλληλες συνθήκες) (μοναδικότητα) γ) η λύση να εξαρτάται συνεχώς (κατά συνεχή τρόπο) από τα δεδομένα (ευστάθεια)

Ερώτηση: Τι εννοούμε με λύση;

- Κλασικές λύσεις $u: U \to \mathbb{R}$, είναι λύσεις στο $C^k(U)$ για μια ΜΔΕ k τάξης (θέλουμε δηλαδή όλες οι μερικές παράγωγοι που εμφανίζονται να είναι συνεχείς)

Ερώτηση: Έχουμε πάντα τέτοιες λύσεις (κλασικές);
Μας ενδιαφέρουν μόνο τέτοιες;

- Όχι, όχι. π.χ η εξίσωση Burgers $u_t + u u_x = 0$ έχει (υπό κατάλληλες συνθήκες) ως λύσεις κρουστικά κύματα, τα οποία παρουσιάζουν ασυνέχειες →



⇒ Θέλουμε να επιτρέψουμε πιο γενικές λύσεις (γενικευμένες ή ασθενείς) λύσεις, για τις οποίες όμως να ισχύει το καλά-τεθιμένο (well-posedness) του προβλήματος (μέσα στη γενικότερη κλάση λύσεων)